行列による特殊相対性理論入門

城所　俊一

§ 1　事件と世界線について

「○月×日午後△時頃，○○市○×町□丁目で火災が発生し……」，これは，よく耳にする火災というある事件についての報道である。この例のように，我々の世界の中で，あるできごとを記述しようとすると，その事件の起った時刻と場所とを指定することがおこなわれる。このうちで，空間のなかのある点を指定しようとする時，物理や数学では，よく座標というものを用いる。例えば，原点と，xyz という直交する3つの軸を決めれば，我々の空間内の任意の点は，3つの実数の組（x，y，z）で表わされる。もう1つ，時刻を指定すれば，我々の世界の任意の事件を記述することができる。

以下の話は，空間が，3次元でなく，1次元の世界についての議論である。この議論で，特殊相対性理論の重要な点は理解できるし，以下の議論を3次元空間の世界まで拡張することは容易である。

空間が1次元的であれば，ちょうど，まっすぐに敷かれた線路の上にいるようなもので，どこかに原点をとり，どちらかの方向を x 軸の正方向と決めれば，任意の空間的な位置は x という1つの実数で指定される。これと，時刻 t とをあわせて（x，t）で任意の事件を記述できる。この時空間を**2次元時空間**と呼ぶ。

次に，この時空間の中の物体の運動を考える。ただし，対象とする運動は，等速度運動に限ることにする。ある x 軸 t 軸を持つ座標系では，その座標系に対しての等速度運動は，1本の直線で表わされる（図1）。時刻0の時，$x=0$（すなわち（0，0）という点）にいた速度 v をもつ物体は，s だけ時間がたつと（x，t）=（vs，s）という点に移る。この物体が通過する時空間内の点をつないだものが物体の運動を表わすのである。時空間内の1点を**事件**と呼び，物体の通過した事件をつなげた線を**世界線**と呼ぶ。この座標系では，物体が $x=0$ を通過した事件は（0，0）で，$x=v$ を通過した事件は（v，1）で表わされ，物体の世界線は $x=vt$ で表わされている。図の直線の傾きが，物体の速度の逆

数を表わす。物体の速度が小さい程，直線の傾きは急になり，$v=0$ では，t 軸と一致する。一般に座標系に対して静止している物体の世界線は，t 軸と平行な直線で表わされるのである（例えば $x=1$ に静止している物体の世界線は $x=1$ という t 軸に平行な世界線を持つ)。

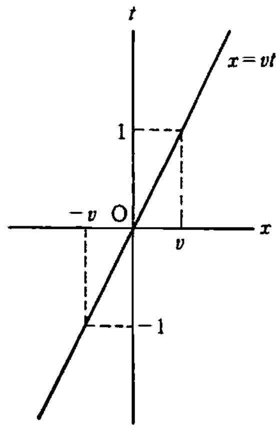


図 1

事件や世界線は，どのような座標を使うかによって，表わされかたが違ってくる。最初にあげた火災の例でも，もしも外国で発生したならば，「現地時間で○月×日午後△時頃，日本時間で○月×日午前□時頃…」などと報道されるであろう。同じ事件でも，時間原点の異なる座標で表現された座標値は異なってくるのである。全世界の時計を，例えばグリニッジ標準時で統一してしまえば，このような複雑なことは無くなるかもしれないが，イギリスと同経度以外の国の人々は，時計が，自分達の生活時間と大幅に違っているために不便を感じるであろう。

物理学の場合も同様の事情が存在する。たとえば，走っている電車の中の物体の運動を記述するには，電車に固定した座標が便利であろう。それを，標準的だからといって，地球の重心に固定した座標系で記述しようとしたら，非常に複雑なことになる。

現実に，各国々に別々の時刻が存在しながら，我々が混乱しないのは，それらの時刻の間の換算のしかたを，我々が身につけているからである。座標の場合も同様で，座標系の間で，同じ事件や世界線が，どのように換算されるのかを知っていれば，混乱は起きない。次節では，異なった座標系の間の，事件や世界線の変換の仕方を調べてみよう。

§ 2　慣性系間の座標変換

「外力の働かない物体は，等速度運動する」というのが**慣性の法則**であるが，この法則が成り立つ座標系のことを**慣性系**と呼ぶ。ここでは，様々な座標系のうち，慣性系間の座標変換に限って議論をする。慣性系以外の座標系については，一般相対性理論を導入しなければならない。

我々の扱う２次元時空間の座標系では，外力の働いていない任意の物体の世界線が，図１のように直線で表わされるような座標系が慣性系と呼ばれるのである。ある慣性系において，一般には，様々な速度で運動している外力の働いていない物体の世界線を考えることができるであろう。

例えば図２のように，ある慣性系に対し，速度０の世界線で表わされる外力の働いていない物体を考えよう。これらの世界線は，x 軸上 $x=i$（$i=\cdots-2, -1, 0, 1, 2, \cdots$）に固定した点を持つ世界線と一致する。今，これらの物体の運動を，他の慣性系で観測した場合，それぞれの物体の世界線は，新しい慣性系ではどのように表わされるだろうか。

慣性系の定義により，新しい慣性系においても，これらの外力の働いていない物体の世界線は直線となる。しかも，それらは互いに平行な直線でなければならない。もしも，ある２本の直線が平行でなかったとすると，その２つの直線は，その平面の中で交点を持つ。つまり，２つの物体が出会うという事件が，その慣性系では観測されることになる。ところが図２の慣性系の場合，そのような事件は絶対に起こらず，後の座標系上の少くとも１点が，最初の慣性系のどの点とも対応しなくなるという不合理が生じるからである。同様の考察により，ある慣性系で互いに平行でなかった世界線は，他の慣性系でも，平行でない世界線に変換されることがいえる。

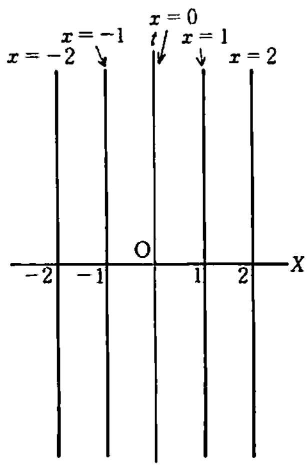


図２

図２で示したような，平行で等間隔な世界線は，他の慣性系でも平行な世界線として観測さ

れることがわかったが，それらは常に等間隔として観測されるだろうか。新しい慣性系では，平行であっても等間隔でないようなことは起こらないのだろうか。この問題を考えるために，図2の中の3つの世界線 $x=-1$，$x=0$，$x=1$ と，この慣性系に対し，v という速度で等速度運動する3つの物体の世界線 $x=vt-1$，$x=vt$，$x=vt+1$ との計6つの物体の世界線に注目する。図3に示したように，これらの世界線（a_{-1}，a_0，a_1，b_{-1}，b_0，b_1 と名前をつける）は，9つの交点を持つ（そのうちの6点にA～Fと名前をつける)。この慣性系に対し，$\frac{1}{2}v$という速度を持った外力の働いていない物体のうち，$x=\frac{1}{2}vt$ という世界線を持つものは，3点A，O，Fを通過する。また，$x=\frac{1}{2}vt-\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{2}vt+\frac{1}{2}$は，それぞれ，2点B，Dおよび2点C，Eを通過する世界線である。

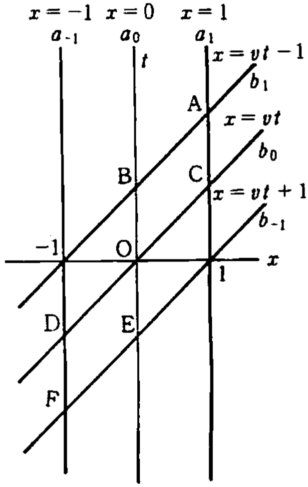


図3

これだけのことを注意して，図3の6本の世界線が，どのように変換されるかを考える。先に議論したように，平行な世界線は平行な世界線に写されるから，図4の様になるであろう。図3で，a，bで表わされた直線は，a'，b'で示した直線に写される。ここで，点A，O，Fを通る直線は，点A′，O′，F′を通る直線に，点B，Dを通る直線，点C，Eを通る直線は，それぞれ点B′，D′，点C′，E′を通る直線に変換され，しかもそれらは互いに平行な直線である。従って，

$$A'O' \parallel C'E' \quad \text{——①}$$

$$A'O' \parallel B'D' \quad \text{——②}$$

が成立する。直線a'_1とa'_0は平行，b'_1とb'_0は

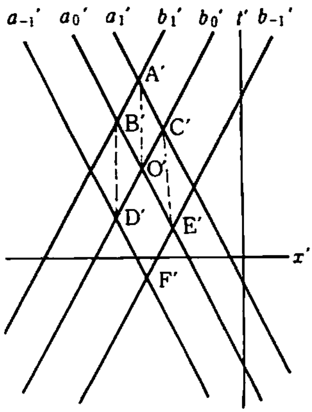


図4

平行だから

$$A'C' \,/\!/\, O'E' \quad \text{——③}$$

$$A'B' \,/\!/\, O'D' \quad \text{——④}$$

である。①と③より，四角形A'O'E'C'は平行四辺形となり$\overline{A'C'}=\overline{O'E'}$，更に，四角形A'B'O'C'が平行四辺形であることから$\overline{A'C'}=\overline{B'O'}$となり，結局$\overline{B'O'}=\overline{O'E'}$が成立する。同様に②と④より，$\overline{C'O'}=\overline{O'D'}$が成立し，これらの事は，直線$a'$，$b'$が，それぞれ，この慣性系でも，等間隔であることを証明している。

平行で等間隔な世界線が，平行で等間隔に写されることより，物体の世界線としては考えられないような，平行で等間隔な直線（例えば，図3で，x軸，直線BC，直線DE）も，やはり，平行で等間隔に変換されていることがわかる。

以上の考察により，一般に次の事が言える。

ある慣性系で，平行で，かつ，等間隔な直線は，他の慣性系でも，平行で，かつ，等間隔な直線として表わされる。

以下の議論では，繁雑さを避けるために，全ての慣性系で，座標の原点をそろえておくことにする。これは，容易に実行できる。例えば，図3でa_0という世界線で表わされる物体と，b_0で表わされる物体が出会うという事件（時空間内の1点，全ての慣性系で1点として観測される）を，原点とするように，全ての慣性系で約束すればよい。図4では，O'と表わされた点を，改めて，その慣性系の原点とすればよい。原点の移動により，それまでの事件の座標や世界線の方程式は，原点の移動した分だけ，平行移動することになる。

このように原点をそろえておけば，図5の慣性系で，座標軸に平行な（単位長さ，単位時間間隔の）等間隔な直線は，図6のように写像される。これに伴って，図5のx軸方向t軸方向の単位ベクトル$\vec{e_x}$，$\vec{e_t}$は，始点の位置がどこにあっても，それぞれ，常に同じベクトル$\vec{e_x'}$，$\vec{e_t'}$に写される。また，

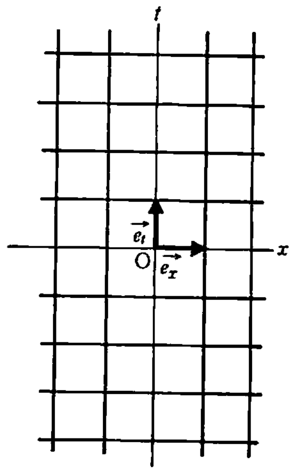


図5

$$\vec{z} = z_x \vec{e_x} + z_t \vec{e_t} \qquad (z_x,\ z_t \text{ は実数})$$

で表わされる，図5の任意のベクトル$\vec{z}$は，

$$\vec{z'} = z_x \vec{e'_x} + z_t \vec{e'_t}$$

というベクトル$\vec{z'}$に変換されることがわかる。

いま，図6のx'，t'座標で表した時，

$$\vec{e'_x} = (e,\ g),\quad \vec{e'_t} = (f,\ h) \qquad (e,\ g,\ f,\ h \text{ は実数})$$

と表わされるとすると，

$$\vec{z'} = (ez_x + fz_t,\ \ gz_x + hz_t)$$

となり，$\vec{z'} = (z'_x,\ z'_t)$ と書くと，

$$\begin{pmatrix} z'_x \\ z'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_t \end{pmatrix} \tag{1}$$

が成立する。すなわち，元の慣性系で（z_x，z_t）と表わされた事件は，新しい慣性系では，式(1)を満たす点（z'_x，z_t'）に変換される。以下の考察より，(原点をそろえた）慣性系間の変換は，1次変換であることが明らかになった。

2つの簡単だが重要な変換の例をあげておこう，1つめは，

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{2}$$

で，これは，ある慣性系から，自分自身（もちろん慣性系である）への変換であり，世界線の方程式，事件の座標とも変化しない，恒等変換である。2つめは，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{3}$$

で，

$$(x',\ t') = (-x,\ t)$$

となる。これは，x軸の方向だけが元と逆の方向を向いた慣性系（これが慣性系であることは明らかであろう）への変換である。例えば，この変換で，世界線 $x = vt$ は，$x' = -vt'$ に変換される。この変換のことを**空間反転**と呼ぶ。

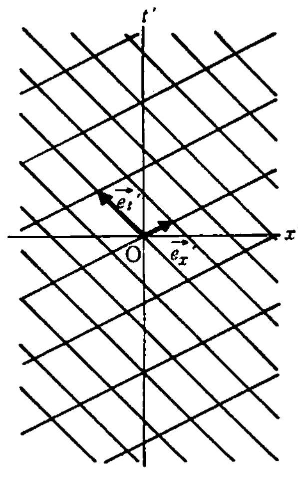


図6

空間反転からの類推で，時間反転という，

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

で表わされる変換を考えるかもしれない。しかし，時間反転をすると，元の慣性系で，ある原因となる事件が起こってから，結果となる事件が起きていたのが，ちょうど映画のフィルムを逆にまわしたように，新しい慣性系では，結果の方が，原因より先に起きてしまい，**因果律**（原因は必ず結果より先に起る）が成り立たなくなってしまう。従って，時間軸が反対を向いたような座標軸は，慣性系からは除外し，時間反転も，慣性系間の変換としては，考えない。

ここで，もう少し一般的に，２つの慣性系Ａ，Ｂ間の関係について考えてみよう。慣性系Ｂで，$x=0$ と表わされる直線すなわち，その座標原点の世界線が，慣性系Ａで $x=vt$ と表わされる時，慣性系Ｂは，慣性系Ａに対して速度 v で等速度運動しているという。逆に，慣性系Ａに対し，速度 v で動く慣性系というのは，ほとんど慣性系Ｂに決まってしまう。ほとんどというのは，慣性系Ｂと空間軸（x 軸）の方向だけが異なる慣性系があるからである。以下の議論では，簡単のために，空間軸が同じ方向を向いた慣性系間の変換だけを考えることにする。従って，慣性系Ａに対し，他の慣性系は，その座標原点の慣性系Ａに対する速度だけで完全に記述できることになる。

「全ての慣性系で同じ物理法則が成立する」という**相対性の原理**を仮定しよう。この仮定についての一般的な考察はしないが，要するに，特別な（例えば絶対的に止まっているというような）慣性系というようなものは存在しないことを仮定しているのである。例えば，ある慣性系から，その慣性系に対し速度 v で動いている他の慣性系への変換は，別の慣性系から，その慣性系に対し速度 v で運動する慣性系への変換と全く同じに行なえることを主張する。また,「慣性系Ａに対し，慣性系Ｂが速度 v で動いている」ことと「慣性系Ｂに対し，慣性系Ａが速度 $-v$ で動いている」ことは同値であることを主張しているのである。

上の考察から，式(1)で用いた e，f，g，h は，元の慣性系が何かによらず，変換される先の慣性系が，元の慣性系に対し，どのような速度で等速度運動しているか，だけで決まってしまう。一般に e，f，g，h は，変換される慣性系の速度 v によって変わるであろうから，それぞれ $e(v)$，$f(v)$，$g(v)$，$h(v)$ と書く。

いよいよ，これらの関数 $e(v)$，$f(v)$，$g(v)$，$h(v)$ の関係を求めよう。元

の慣性系Aにおいて，変換される先の慣性系Bの原点の世界線は $x=vt$ で表わされ，慣性系Bでは，それは $x'=0$で表わされるはずである。このことから，

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(v) & f(v) \\ g(v) & h(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ x = vt \\ x' = 0 \end{cases} \tag{4}$$

が成立する。この連立方程式で x を消去すると，

$$x' = (ve(v) + f(v))t = 0$$

これが任意の t の値について成立するから，

$$ve(v) + f(v) = 0 \tag{5}$$

が成立する。

ここで，慣性系BからAへの変換を考えよう。先程調べたように，相対性の原理から，AはBに対して $-v$ という速度で等速度運動している。この変換を $e(v)$，$f(v)$，$g(v)$，$h(v)$という速度 v での変換で表わすために，まず慣性系Bから，Bを空間反転した慣性系B′に変換する。B′では，Aの世界線は $x=vt$と表わされるが，B′とAとは，x軸の向きが逆なので，B′から，Aを空間反転した慣性系A′にまず変換した後に，Aに変換することにする。つまり，

$$\mathrm{B} \xrightarrow{\text{空間反転}} \mathrm{B}' \xrightarrow{\text{速度 } v \text{ の変換}} \mathrm{A}' \xrightarrow{\text{空間反転}} \mathrm{A}$$

という3つの変換の合成を行なえばよい。BからAへの変換は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(v) & f(v) \\ g(v) & h(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(v) & -f(v) \\ -g(v) & h(v) \end{pmatrix} \tag{6}$$

という行列で表わされることがわかる。これが，AからBへの変換の逆変換だから，

$$\begin{pmatrix} e(v) & -f(v) \\ -g(v) & h(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(v) & f(v) \\ g(v) & h(v) \end{pmatrix}^{-1}$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} e(v) & -f(v) \\ -g(v) & h(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(v) & f(v) \\ g(v) & h(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

が成り立たねばならない。このことより，各要素を比較して，

$$\begin{cases} e(v)^2 - f(v)g(v) = 1 \\ f(v)(e(v) - h(v)) = 0 \\ g(v)(e(v) - h(v)) = 0 \\ h(v)^2 - f(v)g(v) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

という関係が導かれる。もし，$e(v) \fallingdotseq h(v)$ ならば，

$$f(v) = g(v) = 0$$

従って$e(v)^2 = h(v)^2 = 1$

となるが，空間軸，時間軸の向きが逆の変換は考えないから，

$$e(v) = h(v) = 1$$

となり，これは恒等変換である。一方，$e(v) = h(v)$とすると，式(5)とあわせて，

$$\begin{cases} f(v) = -ve(v) \\ h(v) = e(v) \\ g(v) = \dfrac{1 - e(v)^2}{ve(v)} \end{cases}$$

と書ける。ただし，$v = 0$ の時，式(4)による変換は，恒等変換となり，

$$e(0) = h(0) = 1$$
$$f(0) = g(0) = 0$$

である。

結局，ある慣性系から，その慣性系に対し，速度 $v\,(v \fallingdotseq 0)$ で動く慣性系への座標変換は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(v) & -ve(v) \\ \dfrac{1 - e(v)^2}{ve(v)} & e(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{9}$$

で表わされる。

$e(v)$ という関数の性質を調べるため，A，B，Cという３つの慣性系を考えよう。慣性系Aに対しBは速度 v_1，又Bに対しCは速度 v_2 で動いているとする。当然，CはAに対しある速度で運動している（常識的には，これは $v_1 + v_2$ という速度と期待されるが）。この速度を v_3とすると，

$$A \xrightarrow{\text{速度 } v_1 \text{の変換}} B \xrightarrow{\text{速度 } v_2 \text{の変換}} C$$

かつ， (10)

$$A \xrightarrow{\text{速度 } v_3 \text{ の変換}} C$$

が成立する。前者の変換は，

$$\begin{pmatrix} e(v_2) & -v_2 e(v_2) \\ \dfrac{1-e(v_2)^2}{v_2 e(v_2)} & e(v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(v_1) & -v_1 e(v_1) \\ \dfrac{1-e(v_1)^2}{v_1 e(v_1)} & e(v_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e(v_1)e(v_2) - \dfrac{v_2 e(v_2)}{v_1 e(v_1)}(1-e(v_1)^2) & -e(v_1)e(v_2)(v_1+v_2) \\ \dfrac{1-e(v_2)^2}{v_2 e(v_2)} e(v_1) + \dfrac{1-e(v_1)^2}{v_1 e(v_1)} e(v_2) & e(v_1)e(v_2) - \dfrac{v_1 e(v_1)}{v_2 e(v_2)}(1-e(v_2)^2) \end{pmatrix}$$

となる。これが後者の変換

$$\begin{pmatrix} e(v_3) & -v_3 e(v_3) \\ \dfrac{1-e(v_3)^2}{v_3 e(v_3)} & e(v_3) \end{pmatrix}$$

と等しくなるためには，前者の変換で，1行1列め，2行2列めの要素が等しくなることが必要であり，

$$\frac{v_2 e(v_2)}{v_1 e(v_1)}(1-e(v_1)^2) = \frac{v_1 e(v_1)}{v_2 e(v_2)}(1-e(v_2)^2)$$

が成り立たねばならない。これを変形して，

$$\frac{1-e(v_1)^2}{v_1^2 e(v_1)^2} = \frac{1-e(v_2)^2}{v_2^2 e(v_2)^2}$$

としてみると，この式は，両辺の値が，v_1，v_2に依らない定数であることを示している。今，この定数を$-\alpha$とすると，任意の速度vで，

$$\frac{1-e(v)^2}{v^2 e(v)^2} = -\alpha$$

が成立する。$e(0)=1$ であることに注意すると，$e(v)$ は，

$$e(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha v^2}}$$

と決まってしまうのである。これを式(9)に代入すると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha v^2}} & -\dfrac{v}{\sqrt{1-\alpha v^2}} \\ -\dfrac{\alpha v}{\sqrt{1-\alpha v^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{11}$$

となり，これが，慣性系間の変換を与えることになる。

式(11)で与えられる変換が，(10)の図式を満たしているかどうか調べてみよう。(10)の前者の変換は，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha v_2^2}} & -\dfrac{v_2}{\sqrt{1-\alpha v_2^2}} \\ -\dfrac{\alpha v_2}{\sqrt{1-\alpha v_2^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha v_2^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha v_1^2}} & -\dfrac{v_1}{\sqrt{1-\alpha v_1^2}} \\ -\dfrac{\alpha v_1}{\sqrt{1-\alpha v_1^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha v_1^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha v_2^2)(1-\alpha v_1^2)}} \begin{pmatrix} 1+\alpha v_1 v_2 & -(v_1+v_2) \\ -\alpha(v_1+v_2) & 1+\alpha v_1 v_2 \end{pmatrix}$$

これが，(10)の後者の変換

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha v_3^2}} & -\dfrac{v_3}{\sqrt{1-\alpha v_3^2}} \\ -\dfrac{\alpha v_3}{\sqrt{1-\alpha v_3^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha v_3^2}} \end{pmatrix}$$

と等しくなるように，各要素を比較すると（計算は省略），

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \alpha v_1 v_2} \tag{12}$$

が，必要十分条件であることがわかる。この式のことを，**速度の合成則**という。分母の $\alpha v_1 v_2$ が 1 に比べて十分小さく無視できる時，我々の常識の $v_3 = v_1 + v_2$ が得られる。

§3　ガリレイ変換とローレンツ変換

前節では，慣性系間の座標変換について，慣性系が全て同等であるという相対性原理を仮定し，その変換が式(11)で表わされることを示した。しかし，まだ定数αは決まっていない。この定数を決定するために，この節では，2つの異なった仮定を立てて，この変換を調べてみよう。

（I）ガリレイ変換

アインシュタインの特殊相対性理論が現われる以前は，慣性系によって時間が異なるなどということは考えられていなかった。我々の日常生活においても，走っている車と，止っている人とで，ある事件の起こった時刻が異なって見えるとは期待しないだろう。このことは，式(11)の変換で，常に$t'=t$となることを仮定しているのである。これは$\alpha=0$とすれば実現される。この時，式(11)は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{13}$$

となる。この変換のことを**ガリレイ変換**と呼ぶ。式(12)の速度の合成則においても，$\alpha=0$とすると，我々の常識と一致する。

ガリレイ変換の応用例として，光のドップラーシフトについて考えよう。光は波であり，節点（波の振幅が0になる点）が存在する。ある1つの節点は，波の進行とともに，光の速度cで等速運動する。たとえば，$t=0$で$x=0$にあった節点の世界線は$x=ct$となる。波長をλとすると（1波長当り，節点が2つあることを注意すると），その他の節点の世界線は，図7に示すように，

$$x = ct + n\frac{\lambda}{2} \quad (n\text{は整数}) \tag{14}$$

で表わされる。$x=0$という点には，式(14)より，

$$\Delta t = \frac{\lambda}{2c}$$

という時間間隔で節点がやってくることになり，振動数は，

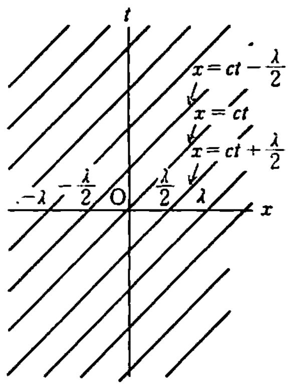


図7

$$\nu = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{c}{\lambda} \tag{15}$$

と観測される。

この慣性系に対し，速度 v で動いている慣性系では，これらの世界線を式(13)で変換したものが観測される。

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} & \text{——①} \\ x = ct + n\dfrac{\lambda}{2} & \text{——②} \end{cases}$$

より，①式の両辺に逆行列をかけて，

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

これを②に代入し，x，t を消去すると，

$$x' = (c - v)t' + n\frac{\lambda}{2} \quad (n \text{は整数}) \tag{16}$$

が成り立つ。すなわち，新しい慣性系では，元の慣性系と比べて，波長は同じだが光の速度が変わったように観測される。$x' = 0$ では，式(16)より，

$$\Delta t' = \frac{\lambda}{2(c - v)}$$

という時間間隔で節点が訪れ，振動数 ν' は，

$$\nu' = \frac{1}{2\Delta t'} = \frac{c - v}{\lambda}$$

$$= \frac{c}{\lambda}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right) \tag{17}$$

と観測される。v が正の時 $\nu > \nu'$ で，v が負であれば $\nu < \nu'$ となる。

波の振動数が，運動によって変化して観測されることをドップラーシフトと呼ぶが，式(17)は，ガリレイ変換から期待される光のドップラーシフトを表わしている。

(II) ローレンツ変換

ガリレイ変換によれば，式(16)のように，観測する慣性系の速度によって，光

の速度は変わってくるはずである。しかし，前世紀の終りから，今世紀にかけて，慣性系による光速度の差を測定しようとする精密な実験が行なわれたが，差は見られなかった。また，電磁気学の基本法則であるマクスウェル方程式は，ガリレイ変換によると，慣性系によって方程式が異なるという困難があった。後者の困難も，光の速さが慣性系によって異なるという，ガリレイ変換の帰結によって起こるものである。

そこでアインシュタインは，$t'=t$ とするガリレイ変換を導く仮定の代わりに，光の速さが慣性系によって変わらないという，**光速度不変の原理**を仮定した。すなわち，$x=ct$ という世界線は，式(11)の変換によって，$x'=ct'$ という世界線に写されると仮定するのである。

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha v^2}} & -\dfrac{v}{\sqrt{1-\alpha v^2}} \\ -\dfrac{\alpha v}{\sqrt{1-\alpha v^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ x = ct \\ x' = ct' \end{array}\right.$$

より，x'，t'，x を消去すると，

$$\frac{ct - vt}{\sqrt{1-\alpha v^2}} = c\,\frac{t - \alpha vct}{\sqrt{1-\alpha v^2}}$$

より，
$$\alpha = \frac{1}{c^2}$$

と決まる。$\beta = \dfrac{v}{c}$ と定義すると，式(11)は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{-v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{18}$$

となる。この変換のことを**ローレンツ変換**と呼ぶ。

現在では，様々な実験事実から，慣性系間の変換は，ガリレイ変換ではなく，ローレンツ変換であることが確立されている。ところが，この変換によると，日常生活では予想しないような現象が観測されることになる。次節では，このことについて考察する。

ただし，式(18)で，光速度 c に比べて v が充分小さい時，β は 1 より充分小さくなり，式(18)のローレンツ変換は，式(13)のガリレイ変換に一致する。光速度は，毎秒30万km という速さであるから，日常生活で経験する程度の速さの慣性系間の変換では，ローレンツ変換はガリレイ変換と，ほとんど同じなのである。

式(18)を見て，1 つ心配になるのは，ある慣性系から，その慣性系に対し光速度より大きな速度 v で運動している慣性系へ変換しようとすると，根号の中が負になってしまい，変換できなくなってしまうことである。

現在までの所，光速より速い速度を持った物体は見つかっていないので式(18)のままで不自由はしない。そればかりか，後でみるように，もしも光速度より大きな速度を持った粒子が存在したとすると，因果関係がくずれてしまう恐れがある。ここでは，光速より速く運動する慣性系は考えないことにする。

この節の終りに，ガリレイ変換で先に求めたドップラーシフトを，ローレンツ変換で調べてみよう。ある慣性系における光の節点の世界線が式(14)で表わされるとすると，その慣性系に対し速度 v で動く慣性系においては，

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\dfrac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} & \text{——①} \\
x = ct + n\dfrac{\lambda}{2} & \text{——②}
\end{cases}
$$

を満たす x' と t' の関係式が，それらの世界線を与える。①式の両辺に逆行列をかけて，

$$
\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\dfrac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}
$$

より，②に代入して，x，t を消去して，

$$\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}=c\frac{v/c^2x'+t'}{\sqrt{1-\beta^2}}+n\frac{\lambda}{2}$$

$$\left(1-\frac{v}{c}\right)x'=(c-v)t'+n\frac{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}{2}$$

$$\therefore\quad x'=ct'+n\frac{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}{2}\frac{c}{c-v}$$

$$=ct'+n\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\quad（n\text{は整数}）\tag{19}$$

となり，速度は変わらないが，波長が $\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$ 倍になっている。これに伴い，振動数は，

$$\nu'=\frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}=\nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\tag{20}$$

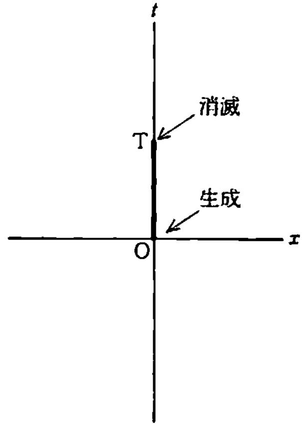
で，$\beta>0$（すなわち $v>0$）ならば $\nu>\nu'$，$v<0$ ならば $\nu<\nu'$ となるが，その速度 v の依存の仕方は，ガリレイ変換による式(17)とは異なっている。

§ 4　ローレンツ変換からの帰結

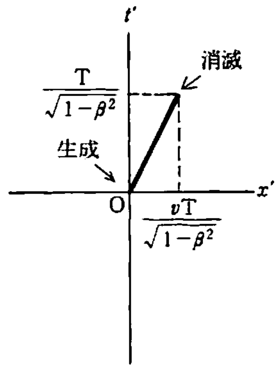
今，次のような問題を考えよう。「速度 v で等速運動する粒子がある。この粒子の寿命（生成してから消滅するまでの時間）がTである時，この粒子は，生まれてから死ぬまで，どれだけの距離を飛ぶことになるか。」常識的には vT と答えるであろう。もしも，粒子の寿命T，速度 v，および飛距離を測った慣性系が同じであるならば，これは正しい答えである。しかし，一般には，粒子の速度も飛距離も，そして寿命さえも観測する慣性系によって異なってくることに注意しなければならない。

より厳密に問題を出すならば，「ある慣性系Aに対し，速度 v で等速度運動する粒子がある。この粒子の寿命をその粒子とともに動く慣性系Bで観測するとTであった。慣性系Aでは，この粒子は，どれだけの距離を飛ぶことになるか。」とすべきである。

まず慣性系Bでの，この粒子の世界線を考えよう。慣性系A，Bとともに，粒子が生成するという事件を原点ととるものとする。粒子の世界線は，粒子とともに動く慣性系Bでは図8(a)のようになるであろう。この慣性系では，粒子の寿命はT，速度と飛距離は0である。慣性系Bでは，粒子の生成，消滅という事件は，それぞれ $(x, y)=(0, 0)$，$(0, T)$ という座標値で表わされる。これをローレンツ変換を用いて慣性系Aに変換する。BはAに対して速度 v で動いているから，AはBに対して速度 $-v$ で運動している。式(18)で v の所を $-v$，β の所を $-\beta$ と



(a) 慣性系B



(b) 慣性系A

図8

おきかえれば，この変換が得られ，

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

となり，$(x,\ t)=(0,\ 0)$，$(0,\ \mathrm{T})$ は，それぞれ，$(x',\ t')=(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{v\mathrm{T}}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \dfrac{\mathrm{T}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ に変換され，粒子の世界線は図 8 (b)のようになる。

従って，この慣性系での粒子の飛距離は$\dfrac{v\mathrm{T}}{\sqrt{1-\beta^2}}$である。$\beta$が 1 に比べて充分小さければ(すなわち粒子の速さが光速に比べて充分小さければ)，常識的な $v\mathrm{T}$と一致するが，例えば$\beta=0.99$ （粒子の速度が光速の99%）の時，粒子は，$v\mathrm{T}$の約 7 倍も飛行することになる。

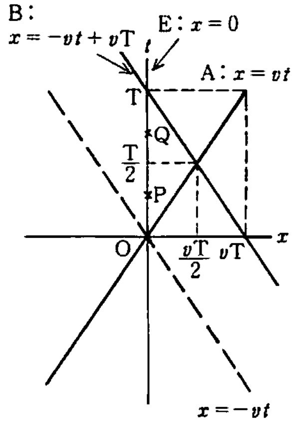
もう 1 つ注目すべきことは，慣性系Aでは，粒子の寿命が$\dfrac{\mathrm{T}}{\sqrt{1-\beta^2}}$と観測されることである。例えば$\beta=0.99$の時，粒子の寿命はTの約 7 倍となる。速く動いている粒子ほど，寿命が長くなったように観測されるのである。「光速に近い速さで飛ぶロケットに乗っている人の寿命は長くなる。」といわれるのは，この現象を言っているのである。正確には「…乗っている人の寿命は，地球の慣性系から観測すると長くみえる。」とすべきだが。たとえば，$\beta=0.99$のロケットに乗ってゆけば，70歳の寿命の間に，地球から約490光年（ 1 光年は光が届くのに 1 年かかる距離）離れた星まで旅することができるのである。

上の話は，地球から行ったっきりの話だったが，たとえば 245 光年位の所でUターンして地球に戻ってきたらどうなるのだろうか。浦島太郎のように，490年先の世界に行けるであろうか。いや，逆に，ロケットに固定した慣性系で考えれば，地球は$\beta=0.99$で等速度運動しているのだから，地球にいる人の寿命は，ロケットの時計で 7 倍長く観測されるのではないか。だとしたら，ロケットの中は70年たったのに，地球では，まだ10年しかたっていないという事態が予想されるのではないか。さて，どちらが正解なのだろう。

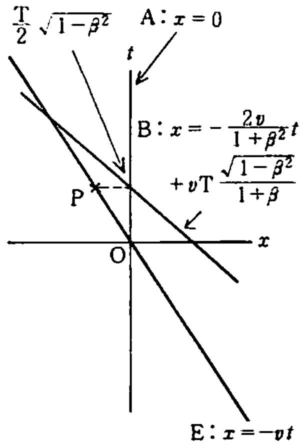
これは「**双子のパラドックス**」という有名な問題である。ロケットが等速度運動している限り，地球には帰れないのであるから矛盾は起きない。問題は，ロケットがUターンする所にある。実は，この時に，ロケットに乗っている人

は，地球に対して $\beta=0.99$ で遠ざかる慣性系から，同じ速さで反対に地球に向かってくる慣性系にとびうつると考えられるのである。

地球においた慣性系をE，最初ロケットとともに地球から速度 v で遠ざかる慣性系をA，速度 $-v$ で地球に近づいてくる慣性系をBとすると，慣性系Eでの，地球，速度 v のロケット，速度 $-v$ のロケットの世界線は図9(a)のようになるであろう。Aというロケットに乗った人は，そのまま乗っていれば，地球の時間でT（490年）経過すると vT（約490光年）離れた星に達することができる。このロケットが地球を出発するのと同時に，速度 $-v$ のロケットBが，この星から地球に向けて発射される。2台のロケットは，慣性系Eで，$\frac{T}{2}$（245年後）に，$\frac{vT}{2}$（約240光年）の所ですれ違う。この時Aに乗っていた人は，Bにとび移る。そして，地球の時間で出発からT（490年）後に地球に戻ってくるのである。



(a) 慣性系E



(b) 慣性系A

図9

慣性系A，Bの座標原点を，慣性系Eとそろえておこう。それぞれの慣性系で，地球からロケットが出発する事件を原点にとればよい。そうすれば，慣性系Eから，これに対して速度 v で走る慣性系Aへの変換は，式(18)で与えられる。例えば $x=0$ という世界線は，

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix}x'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix} \text{——①}\\ x=0 \text{——②}\end{array}\right.$$

を満たす x'，t' の関係式に写される。②を $x=vt$ または，$x=-vt+v\mathrm{T}$ と置き

かえれば，それぞれの世界線が，どのように変換されるかがわかる。①の両辺に逆行列をかけて，

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

今②の代わりに，$x=-vt+vT$ を連立させると，x，t をただちに消去できて

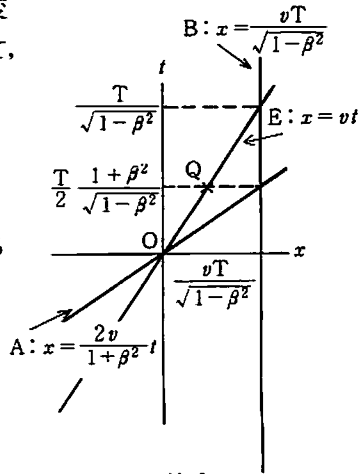
$$\left(\frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$=-v\left(\frac{v/c^2 x'}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)+vT$$

両辺に$\sqrt{1-\beta^2}$をかけて，x'，t' についてまとめれば，

$$\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)x'=-2vt'+vT\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\therefore \quad x'=-\frac{2v}{1+\beta^2}t'+vT\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta^2}$$



(c) 慣性系B

図9

という世界線に変換されることがわかる。同様に，$x=0$ は $x'=-vt'$ に，$x=vt$ は $x'=0$ に写される。これらを図9(b)に示す。図より，ロケットAに乗った人は，慣性系Aの時計で，出発してから$\dfrac{T}{2}\sqrt{1-\beta^2}$（約35年）後に，ロケットBとすれ違う。確かに，35年で，地球の慣性系でみて約240光年先まで到達したのである。

同じように，図9(a)の世界線を慣性系Bに変換してみよう。ここで1つ注意しておくことは，慣性系Bの原点は地球とロケットAの世界線の交点と決めたので，図9(a)のロケットBの世界線は，慣性系Bの原点の世界線ではないことである。図9(a)中に，慣性系Bの原点の世界線（$x=-vt$）を破線で示した。

慣性系Eでの事件（x，t）は，慣性系Bでは（x'，t'）で表わされ

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

が成立する。これは，逆行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{-v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

と書ける。これと，慣性系Eでの世界線 $x=-vt+v\mathrm{T}$ を連立させ，x，t を消去すると，

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = -v\left(\frac{-v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}x' + \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + v\mathrm{T}$$

$$\therefore \quad x' = v\mathrm{T}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta^2}$$

という世界線に変換されることがわかる。同様に，A：$x=vt$ は $x'=\dfrac{2v}{1+\beta^2}t'$ に，E：$x=0$ は $x'=vt'$ に写され，図９(c)を得る。慣性系Bでの世界線Bと世界線E，Aの交点を求めると，図に示したように，それぞれ，$\dfrac{\mathrm{T}}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$\dfrac{\mathrm{T}}{2}\dfrac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ という時刻である。慣性系Bの時計で，ロケットBがAと出会って，人が飛び移ってから，地球に戻るまでの時間は，従って

$$\frac{\mathrm{T}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\mathrm{T}}{2}\frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathrm{T}}{2}\sqrt{1-\beta^2}$$

となり，ロケットA，Bがすれ違ってからやはり約35年で地球に戻る。２つのロケットを乗り継いでUターンした人は，出発してから合計で70歳しか年をとっていないのである。

それでは，ロケットで旅する人から見て，地球での事件は，どのように観測されるだろうか。これを調べるために，慣性系A，BにおいてロケットA，Bが出会ったという事件と同時に観測される地球上の事件について考えてみよう。慣性系Aでは図９(b)の事件Pが，慣性系Bでは図９(c)の事件Qが，ロケットがすれ違うという事件と同時に起きたと観測される。それぞれの慣性系で

2点は，$P\left(-\frac{vT}{2}\sqrt{1-\beta^2},\ \frac{T}{2}\sqrt{1-\beta^2}\right)$，$Q\left(\frac{vT}{2}\frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{T}{2}\frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$という座標で表わされている。これらの事件は，慣性系Eでは，それぞれ

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{vT}{2}\sqrt{1-\beta^2} \\ \frac{T}{2}\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T}{2}(1-\beta^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{vT}{2}\frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{T}{2}\frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T}{2}(1+\beta^2) \end{pmatrix}$$

すなわち$P\left(0,\ \frac{T}{2}(1-\beta^2)\right)$，$Q\left(0,\ \frac{T}{2}(1+\beta^2)\right)$に変換される(図9(a)参照)。よって地球上の時計では，Pという事件は，ロケットが出発してから$\frac{T}{2}(1-\beta^2)$（約5年）しか経過してなく，Qという事件は$\frac{T}{2}(1+\beta^2)$(約485年)後の事件として観測される。ロケットAからロケットBに乗り移った瞬間に，それと同時刻として観測される地球の時間は，実に480年もたってしまうのである。この時間のとびを考慮すると，ロケットに乗ってUターンして地球に戻る人から見ても，地球では，やはり490年経過してしまう事になるのである。

地球上の座標系Eは常に慣性の法則の成立する慣性系であったが，ロケットで往復する人は，途中で加速度運動したり，慣性系を飛び移ったりしなければならない。この時には，この人と一緒に動く座標系では，もはや慣性の法則が成り立たないから，特殊相対論を安易に適用してはいけなかったのである。

ここで，**事件の同時性**について注意しておこう。慣性系Aでは，Pという事件と，ロケットを乗り換えるという事件とは同時だったが，慣性系Eでは，両者は起きた時刻が約30年も異なる事件として観測されるのである。一般に，2つの事件が同時か否かは，どの慣性系で観測するのかによって異なってくるのである。

ただし，同じ場所で同時に起った事件は，時空内の1点であるから，どの慣性系でみても1点として観測され，同時に起った事件とされる。また，2つの事件が因果関係を持っている場合，これらの起った順序は，どの慣性系

で観測しても，常に原因が結果よりも先に起こる。この事を確かめておこう。

原因となる事件をA，結果となる事件をBとする。AがBの原因であるということは，Aが起ったことの影響を受けた後にBが起こるということである。事件Aを原点としたある慣性系で，A，Bの空間距離を l とし，この慣性系で，影響が伝わる速さを v' とすると，早くともBの起こるのは $t_0 = l/|v'|$ 以降のはずである。事件Bの座標を（l，t）とすると，

$$t \geqq t_0 = l/|v'|$$

が成立する。すなわち

$$|v'| \geqq \frac{l}{t} \tag{21}$$

である。この慣性系に対し，任意の速度 v で運動する慣性系における事件A，Bの座標を考えると，慣性系の原点をそろえておけば，Aは（0，0）に，Bは

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{-v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{l-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{t\left(1-\dfrac{l}{t}v/c^2\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

に写される。今，t' に注目すると，式(21)を使って，

$$t' = \frac{t\left(1-\dfrac{l}{t}v/c^2\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \geqq \frac{t\left(1-\dfrac{l}{t}\left|\dfrac{v}{c^2}\right|\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \geqq \frac{t\left(1-\dfrac{|v||v'|}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{22}$$

ここで，

$$|v| < |c|$$

であるから，影響の伝わる速さ v' が光速度より小さければ，右辺は常に正であり，t' は常に正である。従って，任意の慣性系で，事件Bは，原因となる事件Aよりも後に起こったように観測されるのである。

前節の宿題であったように，もしも，光速度以上の速度を持つ物体があったとしよう。たとえば事件Aとは，この物体を発射したというできごと，事件Bとは，この物体が何かに衝突した事件だとすると，$v' > c$ であるから，式(22)より，予想されるように，適当な慣性系で観測すると $t' < 0$ となることが起こる。その慣性系で見ると，物体を発射する前に，発射した物体が衝突するという，まさに，映画のフィルムの逆まわしのような事態が起きてしまうのである。

最後に，ローレンツ収縮について注目しておこう。図9(a)で見たように，慣性系Eで見た時には，慣性系Bの原点とロケットBの世界線は，空間的に常に vT（約490光年）離れている。ところが，慣性系Bで観測すると，図9(c)のように，両者の空間的距離は $\dfrac{vT}{\sqrt{1-\beta^2}}$ となり，約3430光年も離れていることになる。一般に，ある慣性系Aに対して動いている慣性系Bのものさしは，慣性系Aで観測すると短かく見える。このことを，**ローレンツ収縮**と呼ぶ。これは，ローレンツ変換からの有名な帰結の1つである。

§5　あ　と　が　き

この小論は，ある学習塾で，高校2，3年生を対象に行った勉強会の内容を，整理し直したものである。行列の計算，特に行列による点や直線の変換の計算の応用として，相対性原理を満す変換，更に，ガリレイ変換やローレンツ変換などを実際に導出してみる事，また，ロケットの人間の寿命ののびを自らの手で再現してみるのは，行列の練習問題として役立つだけでなく，特殊相対論の時空間に対する考え方を体験してみることができるであろう。

説明に舌足らずの所，まどろっこしく感ずる所があろう。参考文献2の前書きにあるように，人にはそれぞれ自分なりの納得の仕方があるようである。この小論が，特殊相対性理論の理解に少しでもお役に立てば幸いである。

相対性理論については，非常に多くの解説書が書かれているが，私が学んだ本2冊を挙げておく。特に本文中の双子のパラドックスの問題については，文献1のアイディアを参考にした。

（参　考　文　献）

1. 内田龍雄，相対性理論，岩波全書（1977）
2. 高橋　康，初等相対性理論，講談社サイエンティフィク（1983）